מרחב ווקטורי

# הגדרה

מרחב ווקטורי V מעל שדה הוא קבוצה שעליה מוגדרת פעולת חיבור וכן פעולת כפל המקשרת בינו לבין . הפעולות הנ"ל מקיימות אקסיומות שראיתם בשיעור. איברי V נקראים ווקטורים ואיברי נקראים סקלרים.

# דוגמאות

1. מרחב ווקטורי(מ"ו בקיצור) מעל עם חיבור רכיב רכיב וכפל בסקלר.
2. הוא מ"ו מעל עם חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר.
3. מקרה פרטי של 1: כל שדה הוא מרחב ווקטורי מעל עצמו.

# תרגיל 1.2(עמ' 34)

יהא עם חיבור וקטורי רגיל. האם פעולת הכפל הבאה(מעל ) משרה מבנה של מרחב וקטורי על ?

## פתרון

פעולות הכפל בסדלק במ"ו אמורות לקיים מס' תכונות:  
לכל :

יהי

מצד שני

*הביטויים הנ"ל אינם שווים לכל – למשל*

# הגדרה(של תת מרחב)

יהי V מרחב ווקטורי מעל . נאמר שW הוא תת מרחב(בקיצור ת"מ) של V אם:

1. הקבוצה W היא מרחב ווקטורי מעל ביחס לחיבור ולכפל

## דוגמאות

1. אם V מ"ו מעל , אז V הוא ת"מ של V.

ת"מ טריוויאלים

1. אם מ"ו מעל , אז ת"מ של V.
2. הוא ת"מ של (מעל ). מדובר בישח . כל ישר שיעבור דרך הראשית יהיה ת"מ וקטורי. מצד שני הישר () כי למשל אין סגירות:
3. הוא ת"מ של , אבל שהוא המישור אינו ת"מ.

## הערה

אם ת"מ אזי (תוכיחו בש"ב) ולכן כל ת"מ חייב להכיל את וקטור ה0 של המרחב.

# קריטריון מקוצר לת"מ

1. (או לחילופין )
2. לכל מתקיים
3. לכל מתקיים

# תרגיל 2.8(עמ' 35)

יהא V מ"ו ויהיו תתי מרחבים שלו כך ש. הוכיחו ש ת"מ של

## הוכחה

נעזר בקריטריון המקוצר.

1. נתון . W ת"מ של V ולכן . מצד שני u ת"מ של V ולכן לכן
2. יהי . נתון . u ת"מ של V ולכן
3. יהי :

# תרגיל 2.10(עמ' 35)

. נגדיר

1. הוכיחו ש ת"מ של
2. הוכיחו ש סגור לכפל מטריצות.

## הוכחה(סעיף א')

1. נתון. מתקיים =>
2. יהיו . נראה ש. מתקיים
3. נניח ונראה

## הוכחה לסעיף ב' לא קשור לתתי מרחבים!

נניח צ"ל :

חיבור ואיחוד של תתי מרחבים()

החיתוך הוא ת"מ והוא תת המרחב הגדול ביותר המוכל בU וW. כלומר:

1. אם X ת"מ של V כך ש אזי

לא חייב להיות ת"מ והוא ת"מ אם ורק אם או

# תרגיל 3.4(עמ' 35)

יהא , תתי מרחב

* תארו את
* הוכיחו ש או ואם לא אזי הוכיחו ש אינו ץ"מ

## u המטריצות הסימטריות, w האלכסוניות

ולכן (כל אלכסונית היא סימטרית)

## u מטריצות סימטריות, w משולשיות עליונות

נקבל :

=> ולכן כמו כן A סימטרית ולכן אם נקבל . מכאן ולכן A אלכסונית.

אינו תת מרחב. נראה שאין סגירות לחיבור:

## u מטריצות אנטיסימטריות, w מטריצות עם

הוכחנו בעבר שלכל אנטיסימטרית מתקיים לכן ולכן

סכום של תתי מרחב

יהי V מ"ו ויהיו ת"מ שלו. הסכום הוא תמיד ת"מ והוא המ"ו הקטן ביותר המכיל את U וW.

# תרגיל

בתרגיל הנ"ל מצאו בכל סעיף את סכום תתי המרחבים הנתונים.

## u המטריצות הסימטריות, w האלכסוניות

אזי

## u מטריצות סימטריות, w משולשיות עליונות

נראה עבור (ניתן להוכיח באופן כללי):

סכום ישר

יהיו תתי מרחבים של V. נאמר U הוא סכום יש של V אם ו ובמקרה זה נרשום

## הערה

ראיתם בהרצאה שבמקרה זה כל וקטור ניתן להצגה יחדיה

# דוגמה

נתבונן בשני תתי מרחב של : ו. נראה ש

## הוכחה

1. צ"ל . אם אזי =>
2. . אם נפתור נקבל כלומר: